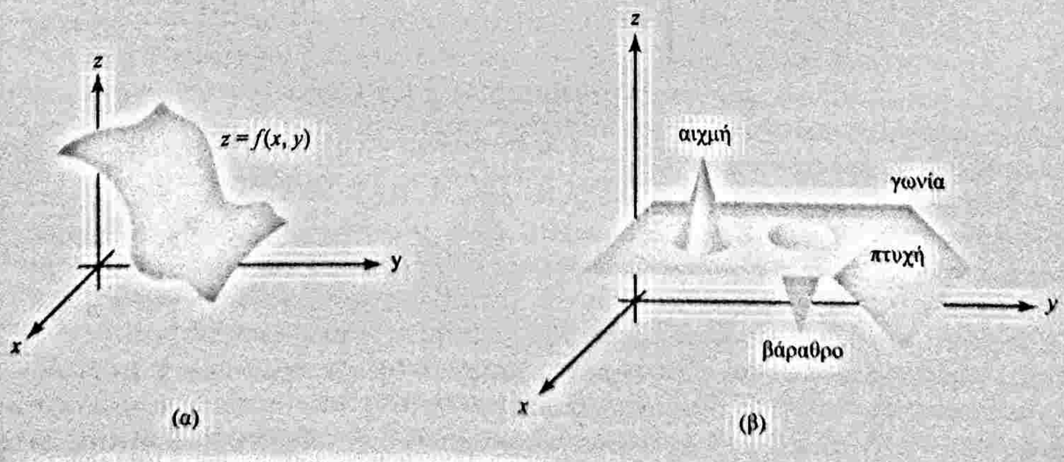
2.3 Παραγώγιση

Στην Ενότητα 2.1 εξετάσαμε κάποιες μεθόδους για τη γραφική αναπαράσταση των συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας μόνο αυτές τις μεθόδους μπορεί να είναι αδύνατο να συγκεντρώσουμε αρκετές πληροφορίες ώστε να καταλάβουμε ακόμη και τα γενικά γνωρίσματα μιας πολύπλοκης συνάρτησης. Από τον στοιχειώδη απειροστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι η ιδέα της παραγώγου μπορεί να μας βοηθήσει σημαντικά σε αυτό. Για παράδειγμα, μας επιτρέπει να εντοπίζουμε τα σημεία μεγίστου και ελαχίστου και να υπολογίζουμε ρυθμούς μεταβολής. Πέρα από αυτές, η παράγωγος έχει πολλές ακόμα εφαρμογές, όπως θα έχετε δει στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Διαισθητικά, από την Ενότητα 2.2 γνωρίζουμε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι μια συνάρτηση της οποίας το γράφημα δεν έχει «διακοπές». Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση από τον $\mathbb{R}^2$ στον $\mathbb{R}$ θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε όχι μόνο το γράφημά της να μην έχει διακοπές, αλλά και να υπάρχει ένα καλά ορισμένο επίπεδο εφαπτόμενο στο γράφημα σε κάθε σημείο. Δηλαδή, δεν θα πρέπει να υπάρχουν απότομες πτυχές, γωνίες ή αιχμές στο γράφημα (βλ. Σχήμα 2.3.1). Με άλλα λόγια, το γράφημα πρέπει να είναι *ομαλό*.

Μερικές παράγωγοι

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε τα παραπάνω, χρειαζόμαστε έναν καλό ορισμό για το τι εννοούμε με τη φράση «η $f(x_1, \dots, x_n)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$». Ο ορισμός δεν είναι τόσο απλός όσο μπορεί να νομίζει κανείς. Για τις ανάγκες του ορισμού, θα εισαγάγουμε την έννοια της *μερικής παραγώγου*. Η έννοια αυτή στηρίζεται μόνο σε όσα γνωρίζουμε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. (Σε αυτό το σημείο ο αναγνώστης ίσως χρειαστεί να κάνει μια γρήγορη επανάληψη του ορισμού της παραγώγου από ένα βιβλίο λογισμού συναρτήσεων μίας μεταβλητής.)



Σχήμα 2.3.1 (α) Ένα ομαλό και (β) ένα μη ομαλό γράφημα.

Ορισμός Μερικές παράγωγοι Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ένα ανοιχτό σύνολο και $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση. Οι $\partial f/\partial x_1, \dots, \partial f/\partial x_n$, οι ***μερικές παράγωγοι*** της f ως προς την πρώτη, δεύτερη, ..., n-οστή μεταβλητή, είναι οι πραγματικές συναρτήσεις n μεταβλητών, οι οποίες, στο σημείο $(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{x}$, ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h}\end{aligned}$$

αν υπάρχουν τα όρια, όπου $1 \le j \le n$ και $\mathbf{e}_j$ είναι το j-οστό διάνυσμα της συνήθους βάσης που ορίζεται ως $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, με 1 στην j-οστή θέση (βλ. Ενότητα 1.5). Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\partial f/\partial x_j$ είναι το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία υπάρχει το όριο.

Με άλλα λόγια, η $\partial f/\partial x_j$ είναι απλώς η παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή x_j, αν κρατήσουμε σταθερές τις υπόλοιπες μεταβλητές. Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, θα χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ αντί του $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, $\partial f/\partial x_3$. Αν $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, μπορούμε να γράψουμε

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

οπότε μπορούμε να μιλάμε για τις μερικές παραγώγους κάθε συνιστώσας. Για παράδειγμα, $\partial f_m/\partial x_n$ είναι η μερική παράγωγος της m-οστής *συνιστώσας* ως προς x_n, την n-οστή μεταβλητή.

Παράδειγμα 1 Αν $f(x, y) = x^2y + y^3$, να βρείτε τις $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$.

Λύση Για να βρούμε την $\partial f/\partial x$ κρατάμε σταθερό το y (το φανταζόμαστε σαν κάποιον αριθμό, φερ' ειπείν 1) και παραγωγίζουμε μόνο ως προς x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial x} = 2xy.$$

Με αντίστοιχο τρόπο, για να βρούμε την $\partial f/\partial y$ κρατάμε σταθερό το x και παραγωγίζουμε μόνο ως προς y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(x^2y + y^3)}{\partial y} = x^2 + 3y^2.$$ ▲

Για να δηλώσουμε ότι η τιμή μιας μερικής παραγώγου πρόκειται να υπολογιστεί σε ένα συγκεκριμένο σημείο, για παράδειγμα στο (x_0, y_0), γράφουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \quad \text{ή} \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

Όταν συμβολίζουμε την εξαρτημένη μεταβλητή με $z = f(x, y)$, μερικές φορές γράφουμε $\partial z/\partial x$ αντί για $\partial f/\partial x$. Μιλώντας αυστηρά, αφού το z αναπαριστά επίσης μεταβλητή, πρόκειται για κατάχρηση του συμβολισμού, αλλά είναι συνήθης πρακτική να χρησιμοποιούνται και οι δύο αυτοί συμβολισμοί.

Παράδειγμα 2

Αν $z = \cos xy + x\cos y = f(x,y)$, να βρείτε τις δύο μερικές παραγώγους $(\partial z/\partial x)(x_0, y_0)$ και $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$.

Λύση

Αρχικά κρατάμε σταθερό το y_0 και παραγωγίζουμε ως προς x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left.\frac{\partial(\cos xy_0 + x\cos y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\\ &= (-y_0 \sin xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0}\\ &= -y_0\sin x_0y_0 + \cos y_0.\end{aligned}$$

Με αντίστοιχο τρόπο, κρατάμε σταθερό το x_0 και παραγωγίζουμε ως προς y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left.\frac{\partial(\cos x_0y + x_0\cos y)}{\partial y}\right|_{y=y_0}\\ &= (-x_0 \sin x_0y - x_0\sin y)|_{y=y_0}\\ &= -x_0\sin x_0y_0 - x_0\sin y_0.\end{aligned}$$

▲

Παράδειγμα 3

Να βρείτε την $\partial f/\partial x$ αν $f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$.

Λύση

Από τον κανόνα του πηλίκου,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy(x/\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+y^2} = \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

▲

Αποδεικνύεται ότι δεν αρκεί να ορίσουμε την παραγωγισιμότητα απαιτώντας μόνο την ύπαρξη των μερικών παραγώγων. Όπως φαίνεται στο Παράδειγμα 4, πολλά βασικά αποτελέσματα, όπως ο κανόνας της αλυσίδας για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, δεν θα προέκυπταν από έναν τέτοιο ορισμό. Στη συνέχεια, θα δούμε πώς μπορούμε να διορθώσουμε την κατάσταση.

Παράδειγμα 4

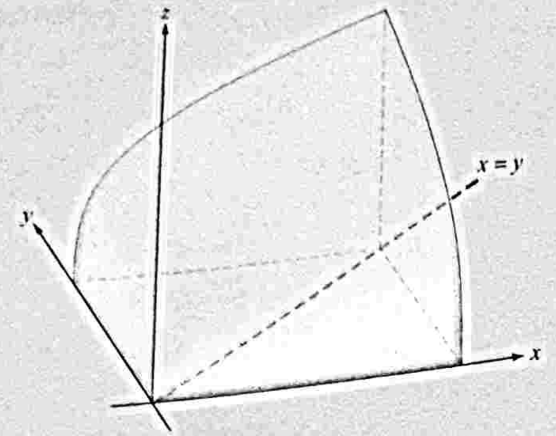
Έστω $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0,$$

και, με αντίστοιχο τρόπο, $(\partial f/\partial y)(0,0) = 0$ (δεν είναι απροσδιόριστες μορφές!). Η χρήση του ορισμού των μερικών παραγώγων είναι αναγκαία, διότι οι συναρτήσεις $x^{1/3}$ και $y^{1/3}$ δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0. Ας υποθέσουμε ότι περιορίζουμε την f στην ευθεία $y = x$ ώστε να έχουμε $f(x,x) = x^{2/3}$ (βλ. Σχήμα 2.3.2). Μπορούμε να δούμε την αντικατάσταση $y = x$ ως τη σύνθεση $f\circ g$ της συνάρτησης $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από την $g(x) = (x,x)$ και της $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

Άρα η σύνθεση $f\circ g$ δίνεται από την $(f\circ g)(x) = x^{2/3}$. Κάθε συνιστώσα της g είναι παραγωγίσιμη ως προς x και η f έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$, αλλά η $f\circ g$ *δεν είναι παραγωγίσιμη* στο $x = 0$, με την έννοια του λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Με άλλα λόγια, *η σύνθεση της f με* την g *δεν είναι παραγωγίσιμη*, σε αντίθεση με όσα ισχύουν στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, όπου η σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων *είναι* παραγωγίσιμη. Παρακάτω, θα δώσουμε έναν ορισμό της παραγωγισιμότητας που έχει την ευχάριστη συνέπεια ότι η σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων *είναι* παραγωγίσιμη.

Υπάρχει ένας ακόμη λόγος να μην μας ικανοποιεί η απλή ύπαρξη των μερικών παραγώγων της $f(x,y) = x^{1/3}y^{1/3}$: Δεν υπάρχει κανένα επίπεδο που να είναι εφαπτόμενο, υπό οποιαδήποτε εύλογη έννοια, στο γράφημα στο σημείο $(0,0)$. Το επίπεδο xy είναι εφαπτόμενο στο γράφημα κατά τη διεύθυνση των αξόνων x και y διότι η f έχει κλίση μηδέν στο $(0,0)$ ως προς αυτούς τους άξονες, δηλαδή $\partial f/\partial x = 0$ και $\partial f/\partial y = 0$ στο $(0,0)$.



Σχήμα 2.3.2 Το τμήμα του γραφήματος της $x^{1/3}y^{1/3}$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

Επομένως, αν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο, πρέπει να είναι το επίπεδο xy. Ωστόσο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3.2, το επίπεδο xy δεν είναι εφαπτόμενο στο γράφημα κατά τις άλλες διευθύνσεις, διότι το γράφημα παρουσιάζει μια οξεία πτύχωση, οπότε δεν μπορούμε να πούμε ότι το επίπεδο xy είναι εφαπτόμενο στο γράφημα της f. ▲

Η γραμμική ή αφινική προσέγγιση

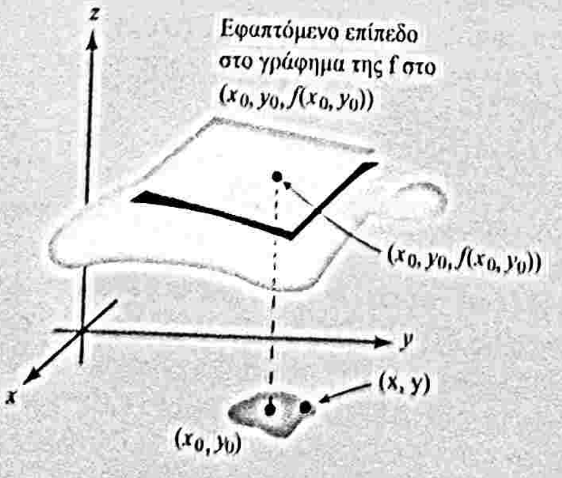
Για να «δικαιολογήσουμε» τον ορισμό της παραγωγισιμότητας που θα δώσουμε, ας υπολογίσουμε ποια πρέπει να είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ στο (x_0, y_0), αν η f είναι αρκετά ομαλή. Στον $\mathbb{R}^3$, ένα μη κατακόρυφο επίπεδο έχει εξίσωση της μορφής

$$z = ax + by + c.$$

Για να είναι αυτό το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f, θα πρέπει οι κλίσεις κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y να ισούνται με $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$, τους ρυθμούς μεταβολής της f ως προς x και y. Άρα $a = \partial f/\partial x$, $b = \partial f/\partial y$ [με την τιμή τους υπολογισμένη στο (x_0, y_0)]. Τέλος, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερά c από το γεγονός ότι $z = f(x_0, y_0)$ όταν $x = x_0$, $y = y_0$. Έτσι παίρνουμε τη ***γραμμική προσέγγιση*** (ή, ακριβέστερα, την ***αφινική προσέγγιση***):

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0), \quad (1)$$

η οποία πρέπει να είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα της f στο (x_0, y_0), αν η f είναι «αρκετά ομαλή» (βλ. Σχήμα 2.3.3).



Σχήμα 2.3.3 Για τα σημεία (x, y) κοντά στο (x_0, y_0), το γράφημα του εφαπτόμενου επιπέδου είναι κοντά στο γράφημα της f.

Ο ορισμός της παραγωγισιμότητας που θα δώσουμε θα σημαίνει ουσιαστικά ότι το επίπεδο που ορίζεται από τη γραμμική προσέγγιση (1) είναι μια «καλή» προσέγγιση της f κοντά στο (x_0, y_0). Για να πάρουμε μια ιδέα του τι μπορεί να εννοούμε λέγοντας καλή προσέγγιση, ας επιστρέψουμε προς στιγμήν στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, γνωρίζουμε ότι

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Θέτουμε $x = x_0 + \Delta x$, οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Χρησιμοποιώντας το τετριμμένο όριο $\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$, γράφουμε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0),$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Άρα η εφαπτόμενη ευθεία l που διέρχεται από το $(x_0, f(x_0))$ με κλίση $f'(x_0)$ είναι κοντά στην f, με την έννοια ότι η διαφορά μεταξύ της $f(x)$ και της $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, της εξίσωσης της εφαπτόμενης ευθείας, πηγαίνει στο μηδέν *ακόμα και* όταν διαιρείται με $x - x_0$ καθώς το x πηγαίνει στο x_0. Αυτή είναι η έννοια της «καλής προσέγγισης» που θα υιοθετήσουμε για τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, αντικαθιστώντας την εφαπτόμενη ευθεία με το εφαπτόμενο επίπεδο [βλ. εξίσωση (1) παραπάνω].

Παραγωγισιμότητα των συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Χρησιμοποιώντας τη γραμμική προσέγγιση, είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την έννοια της παραγωγισιμότητας.

Ορισμός Παραγωγισιμότητα: Δύο μεταβλητές Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο (x_0, y_0), αν οι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ υπάρχουν στο (x_0, y_0) και

$$\frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0, y_0)\|} \to 0 \tag{2}$$

καθώς $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Αυτή η εξίσωση εκφράζει αυτό που εννοούμε λέγοντας ότι η

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

είναι μια ***καλή προσέγγιση*** της συνάρτησης f.

Δεν είναι πάντα εύκολο να χρησιμοποιούμε αυτό τον ορισμό για να διαπιστώσουμε αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη. Θα είναι όμως εύκολο να χρησιμοποιούμε ένα άλλο κριτήριο, που θα δώσουμε παρακάτω, στο Θεώρημα 9.

Εφαπτόμενο επίπεδο

Χρησιμοποιήσαμε άτυπα την έννοια του εφαπτόμενου επιπέδου στο γράφημα μιας συνάρτησης για να δικαιολογήσουμε τον ορισμό της παραγωγισιμότητας που δώσαμε. Είμαστε πλέον έτοιμοι να υιοθετήσουμε έναν αυστηρό ορισμό του εφαπτόμενου επιπέδου.

Ορισμός Εφαπτόμενο επίπεδο Έστω ότι η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο*** του γραφήματος της f στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Παράδειγμα 5 Υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ στο σημείο $(1, 0, 2)$.

Λύση Χρησιμοποιούμε τον τύπο (1) με $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ και $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

Στο $(1, 0, 2)$, οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι 2 και 1, αντίστοιχα. Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), το εφαπτόμενο επίπεδο είναι

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2, \qquad \text{δηλαδή} \qquad z = 2x + y. \qquad \blacktriangle$$

Αν συμβολίσουμε με $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ τον πίνακα-γραμμή

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right],$$

ο ορισμός της παραγωγισιμότητας λέει ότι η

$$\begin{aligned} &f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix} \\ &= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0) \end{aligned} \tag{3}$$

είναι η καλή προσέγγιση που υπολογίσαμε για την f κοντά στο (x_0, y_0). Όπως προηγουμένως, η έννοια «καλή» σημαίνει ότι η έκφραση (3) διαφέρει από την $f(x, y)$ κατά κάτι μικρό επί $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Λέμε ότι η έκφραση (3) είναι η ***βέλτιστη γραμμική προσέγγιση*** της f κοντά στο (x_0, y_0).

Παραγωγισιμότητα: Η γενική περίπτωση

Είμαστε πλέον έτοιμοι να δώσουμε έναν ορισμό της παραγωγισιμότητας για απεικονίσεις f από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ βασιζόμενοι στα όσα έχουμε αναφέρει παραπάνω. Η παράγωγος

$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ της $f = (f_1, \ldots, f_m)$ σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ένας πίνακας $\mathbf{T}$ με στοιχεία $t_{ij} = \partial f_i/\partial x_j$ υπολογισμένα στο $\mathbf{x}_0$.[2]

Ορισμός Παραγωγισιμότητα: n μεταβλητές, m συναρτήσεις Έστω U ένα ανοιχτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ δεδομένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι ***παραγωγίσιμη*** στο $\mathbf{x}_0 \in U$ αν οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

όπου $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ είναι ο πίνακας $m \times n$ με στοιχεία τις $\partial f_i/\partial x_j$ υπολογισμένες στο $\mathbf{x}_0$ και $\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ είναι το γινόμενο του $\mathbf{T}$ με το $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ (ιδωμένο ως πίνακας-στήλη). Ο $\mathbf{T}$ καλείται ***παράγωγος*** της f στο $\mathbf{x}_0$.

Θα συμβολίζουμε πάντα την παράγωγο $\mathbf{T}$ της f στο $\mathbf{x}_0$ με $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, αν και σε μερικά βιβλία συμβολίζεται με $df(\mathbf{x}_0)$ και καλείται ***διαφορικό*** της f. Στην περίπτωση όπου $m = 1$, ο πίνακας $\mathbf{T}$ είναι απλώς ο πίνακας-γραμμή

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right].$$

(Μερικές φορές, όταν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης, χωρίζουμε τα στοιχεία με κόμματα.) Επιπλέον, θέτοντας $n = 2$ και αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην εξίσωση (4), βλέπουμε ότι οι συνθήκες (2) και (4) συμφωνούν. Επομένως, αν θέσουμε $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, μια πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ αν

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}\left|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)h_j\right| = 0,$$

επειδή

$$\mathbf{Th} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

Στη γενική περίπτωση μιας f που απεικονίζει ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$, η παράγωγος είναι ο πίνακας $m \times n$ που δίνεται από την

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

όπου οι $\partial f_i/\partial x_j$ υπολογίζονται στο $\mathbf{x}_0$. Ο πίνακας $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ καλείται ***πίνακας μερικών παραγώγων της f στο $\mathbf{x}_0$***.

[2] Αποδεικνύεται ότι χρειάζεται να απαιτήσουμε την ύπαρξη μόνο *κάποιου* πίνακα που δίνει τη βέλτιστη γραμμική προσέγγιση κοντά στο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, διότι τελικά αυτός ο πίνακας είναι *αναγκαστικά* ο πίνακας που έχει ως ij-οστό στοιχείο την $\partial f_i/\partial x_j$ (βλ. το διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2).

Παράδειγμα 6 Υπολογίστε τους πίνακες μερικών παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων.

(α) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$

(β) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$

(γ) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$

Λύση (α) Η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τις $f_1(x, y) = e^{x+y} + y$ και $f_2(x, y) = y^2 x$. Άρα η $\mathbf{D}f(x, y)$ είναι ο πίνακας 2×2

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

(β) Έχουμε

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\sin y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

(γ) Σε αυτή την περίπτωση,

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}.$$

▲

Κλίσεις

Για την παράγωγο των πραγματικών συναρτήσεων χρησιμοποιούμε ειδική ορολογία.

Ορισμός Κλίση Στην ειδική περίπτωση $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, η $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ είναι ένας πίνακας $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να σχηματίσουμε το αντίστοιχο διάνυσμα $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, το οποίο καλείται ***κλίση*** της f και συμβολίζεται με ∇f ή grad f.

Από τον ορισμό, βλέπουμε ότι για $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

ενώ για $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική σημασία της κλίσης στην Ενότητα 2.6. Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να γράψουμε την παράγωγο της f ως εξής:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

Παράδειγμα 7 Αν $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y$, τότε

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 0).$$

▲

Παράδειγμα 8 Αν η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δίνεται από την $(x, y) \mapsto e^{xy} + \sin xy$, τότε

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y\cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x\cos xy)\mathbf{j}\\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).\end{aligned}$$

▲

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής αποδεικνύεται ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη, τότε η f είναι συνεχής. Στο Θεώρημα 8 θα δούμε ότι αυτό ισχύει και για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Όπως γνωρίζουμε, υπάρχουν πολλές συναρτήσεις μίας μεταβλητής που είναι συνεχείς αλλά μη παραγωγίσιμες, όπως η $f(x) = |x|$. Πριν διατυπώσουμε το αποτέλεσμα, θα δώσουμε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών της οποίας οι *μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε ένα σημείο, αλλά η οποία δεν είναι συνεχής σε αυτό το σημείο.*

Παράδειγμα 9 Έστω η $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x = 0 \text{ ή αν } y = 0 \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Επειδή η f είναι σταθερή στους άξονες x και y, όπου ισούται με 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$, διότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει. ▲

Μερικά βασικά θεωρήματα

Το πρώτο από αυτά τα βασικά θεωρήματα συνδέει την παραγωγισιμότητα με τη συνέχεια.

Θεώρημα 8 Αν η $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 \in U$, τότε η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό, διότι «παραγωγισιμότητα» σημαίνει ότι υπάρχει αρκετή ομαλότητα ώστε να υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο· αυτό είναι ισχυρότερο από το να είναι μια συνάρτηση απλά συνεχής. Η τυπική απόδειξη δίνεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2.

Όπως είδαμε, συνήθως είναι εύκολο να διαπιστώσουμε πότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης χρησιμοποιώντας τα όσα γνωρίζουμε από τον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Ωστόσο, ο ορισμός της παραγωγισιμότητας φαίνεται κάπως σύνθετος, και η απαιτούμενη συνθήκη προσέγγισης της εξίσωσης (4) μπορεί να φαίνεται, και μερικές φορές να είναι, δύσκολο να ελεγχθεί. Ευτυχώς, υπάρχει ένα απλό κριτήριο, που δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα, τα οποίο μας λέει πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη.

Θεώρημα 9 Έστω $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Αν οι μερικές παράγωγοι $\partial f_i/\partial x_j$ της f υπάρχουν όλες και είναι συνεχείς σε μια γειτονιά ενός σημείου $\mathbf{x} \in U$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}$.

Η απόδειξη δίνεται στο διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2. Προσέξτε την ακόλουθη ιεραρχία:

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Θεώρημα 9} & & \text{Ορισμός παραγώγου} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Συνεχείς μερικές παράγωγοι} & \Rightarrow & \text{Παραγωγίσιμη} & \Rightarrow & \text{Υπάρξη μερικών παραγώγων} \end{array}$$

Οι αντίστροφοι ισχυρισμοί, που προκύπτουν με αντιστροφή κάποιας συνεπαγωγής, δεν ισχύουν. [Ως αντιπαράδειγμα για το αντίστροφο της πρώτης συνεπαγωγής, χρησιμοποιήστε την $f(x) = x^2 \sin(1/x)$, $f(0) = 0$. Για τη δεύτερη, βλ. Παράδειγμα 1 στο διαδικτυακό συμπλήρωμα του Κεφαλαίου 2 ή χρησιμοποιήστε το Παράδειγμα 4 αυτής της ενότητας.]

Λέμε ότι μια συνάρτηση της οποίας οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς είναι ***κλάσης*** C^1. Άρα το Θεώρημα 9 λέει ότι *κάθε συνάρτηση* C^1 *είναι παραγωγίσιμη*.

Παράδειγμα 10 Έστω

$$f(x, y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία $(x, y) \neq (0, 0)$.

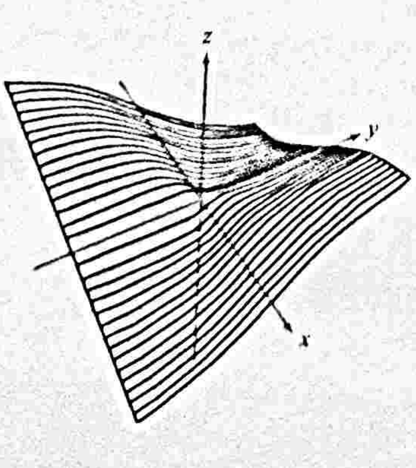
Λύση Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \sin x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

είναι συνεχείς εκτός εάν $x = 0$ και $y = 0$ (σύμφωνα με τα αποτελέσματα της Ενότητας 2.2). Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 9, η f είναι παραγωγίσιμη. ▲

Στο διαδικτυακό συμπλήρωμα αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ [με $f(0, 0) = 0$] είναι συνεχής, έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$, αλλά *δεν* είναι παραγωγίσιμη σε αυτό. Βλ. Σχήμα 2.3.4. Σύμφωνα με το Θεώρημα 9, οι μερικές της παράγωγοι δεν μπορούν να είναι συνεχείς στο $(0, 0)$.



Σχήμα 2.3.4 Αυτή η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$, διότι παρουσιάζει «πτυχώσεις».

Ασκήσεις

1. Βρείτε τις $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y$ αν

(α) $f(x,y) = xy$

(β) $f(x,y) = e^{xy}$

(γ) $f(x,y) = x\cos x \cos y$

(δ) $f(x,y) = (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)$

2. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που υποδεικνύονται.

(α) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $(0,0), (a/2, a/2)$

(β) $z = \log\sqrt{1+xy}$; $(1,2), (0,0)$

(γ) $z = e^{ax}\cos(bx+y)$; $(2\pi/b, 0)$

3. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, βρείτε τις μερικές παραγώγους $\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$.

(α) $w = xe^{x^2+y^2}$

(β) $w = \dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

(γ) $w = e^{xy}\log(x^2+y^2)$

(δ) $w = x/y$

(ε) $w = \cos(ye^{xy})\sin x$

4. Βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι C^1 αν η $f(0,0)$ ορίζεται να είναι 0.

(α) $f(x,y) = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

(β) $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(γ) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

5. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = x^2 + y^3$ στο $(3,1,10)$.

6. Έστω $f(x,y) = e^{x+y}$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(0,0)$.

7. Έστω $f(x,y) = e^{x-y}$. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(1,1)$.

8. Χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις της Άσκησης 1, υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο των γραφημάτων στα υποδεικνυόμενα σημεία.

(α) $(0,0)$

(β) $(0,1)$

(γ) $(0,\pi)$

(δ) $(0,1)$

9. Υπολογίστε τον πίνακα μερικών παραγώγων των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,y)$

(β) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

(γ) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x + e^z + y, yx^2)$

(δ) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (xye^{xy}, x\sin y, 5xy^2)$

10. Υπολογίστε τον πίνακα μερικών παραγώγων των

(α) $f(x,y) = (e^x, \sin xy)$

(β) $f(x,y,z) = (x-y, y+z)$

(γ) $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$

(δ) $f(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y)$

11. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ που έχει κλίση 2 κατά τη θετική κατεύθυνση x και κλίση 4 κατά τη θετική κατεύθυνση y.

12. Έστω $f(x,y) = e^{(2x+3y)}$.

(α) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(0,0)$.

(β) Χρησιμοποιήστε το για να προσεγγίσετε τα $f(0{,}1, 0)$ και $f(0, 0{,}1)$.

(γ) Χρησιμοποιώντας κομπιουτεράκι, βρείτε τις ακριβείς τιμές των $f(0{,}1, 0)$ και $f(0, 0{,}1)$.

13. Που τέμνει τον άξονα z το εφαπτόμενο επίπεδο της $z = e^{x-y}$ στο $(1,1,1)$;

14. Γιατί είναι λογικό να αποκαλέσουμε τα γραφήματα των $f(x,y) = x^2 + y^2$ και $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ «εφαπτόμενα» στο $(0,0)$;

15. Έστω $f(x,y) = e^{xy}$. Δείξτε ότι $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

16. Χρησιμοποιώντας τη γραμμική προσέγγιση, προσεγγίστε κατάλληλη συνάρτηση $f(x,y)$ ώστε να εκτιμήσετε τα παρακάτω:

(α) $(0{,}99e^{0{,}02})^8$

(β) $(0{,}99)^3 + (2{,}01)^3 - 6(0{,}99)(2{,}01)$

(γ) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (2{,}02)^2}$

17. Έστω P το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της $g(x,y) = 8 - 2x^2 - 3y^2$ στο σημείο $(1,2,-6)$. Έστω $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Βρείτε το σημείο του γραφήματος της f που έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο P.

18. Έστω $f(x,y) = xe^{y^2} - ye^{x^2}$.

(α) Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο $(1,2)$.

(β) Ποιο σημείο της επιφάνειας $z = x^2 - y^2$ έχει εφαπτόμενο επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο που βρήκατε στο ερώτημα (α);

19. Υπολογίστε την κλίση των παρακάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ (Προσέξτε ότι $\exp u = e^u$.)

(β) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

(γ) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$

20. Υπολογίστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1, 0, 1)$ για καθεμία από τις συναρτήσεις της Άσκησης 19. [Ο Οδηγός μελέτης περιέχει μόνο τη λύση του ερωτήματος (γ).]

21. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της $z = x^2 + 2y^3$ στο $(1, 1, 3)$.

22. Έστω

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^4 + 6y^8} & \text{αν } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{αν } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ υπάρχουν.

(β) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αποδεικνύοντας ότι η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

23. Έστω P το εφαπτόμενο επίπεδο της $f(x, y) = x^2 y^3$ στο $(1, 2, 8)$. Έστω l η ευθεία που περιέχεται στο P και διέρχεται από το σημείο $(1, 3, 20)$ και διέρχεται ακριβώς πάνω από το $(2, 1)$. Δηλαδή η l περιέχει το σημείο $(1, 3, 20)$ και ένα σημείο της μορφής $(2, 1, z)$. Βρείτε μια παραμετρικοποίηση της l.

24. Υπολογίστε το $\nabla h(1, 1, 1)$ αν $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$.

25. Έστω $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Υπολογίστε το $\nabla f(0, 0, 1)$.

26. Υπολογίστε την κλίση της $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ στο $(1, 0, 1)$.

27. Περιγράψτε όλες τις συνεχείς κατά Hölder συναρτήσεις με $\alpha > 1$ (βλ. Άσκηση 33, Ενότητα 2.2). (Υπόδειξη: Ποια είναι η παράγωγος μιας τέτοιας συνάρτησης;)

28. Υποθέστε ότι η $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική απεικόνιση. Ποια είναι η παράγωγος της f;